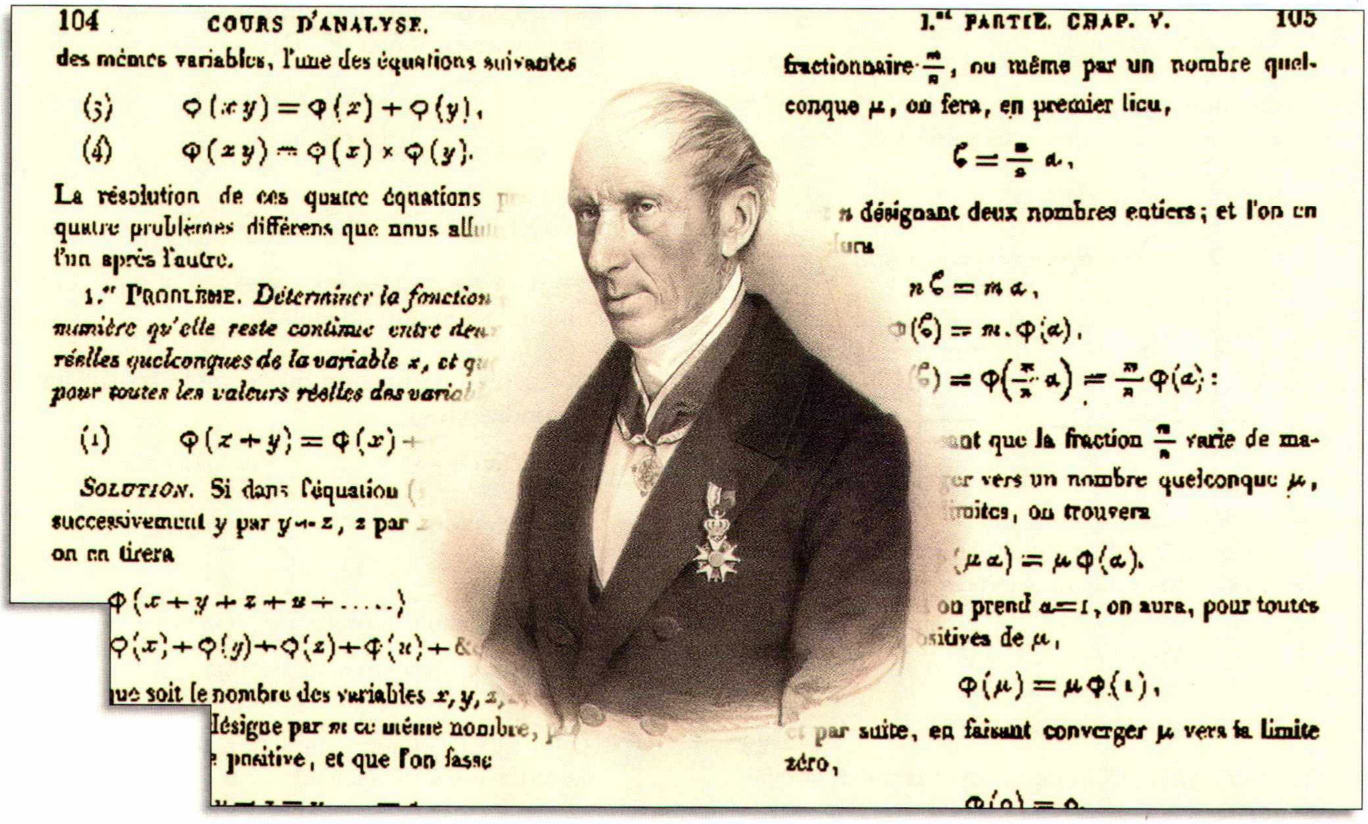
12 INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

El **concepto de derivada** surgió como resultado de algunos siglos de esfuerzo dirigidos a resolver dos problemas: determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y encontrar velocidades instantáneas en movimientos no uniformes. Estos problemas interesaron a los matemáticos desde tiempos antiguos, pero hasta el siglo XVI, la resolución de cada problema particular se hacía mediante un método específico no generalizable a otros problemas similares.

En el siglo XVII, los conocimientos acumulados hasta entonces permitieron a Newton y Leibnitz dar una respuesta teórica y completa a todos estos tipos de problemas, mediante la invención de la derivada. Un siglo después, Euler contribuyó a mejorarla. No obstante, la base lógica y, por tanto, los conceptos formales desarrollados por estos matemáticos fueron insuficientes para que el cálculo de derivadas fuera un proceso claro y sistemático. Fue Cauchy, a comienzos del siglo XIX, quien, al relacionar de forma clara el concepto de derivada con el de límite, consiguió un respaldo formal básico gracias al cual el cálculo de derivadas se redujo a sencillas operaciones formales. Tanto es así, que un estudiante actual de Bachillerato maneja estos procedimientos con mayor soltura que los grandes matemáticos anteriores a Cauchy.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

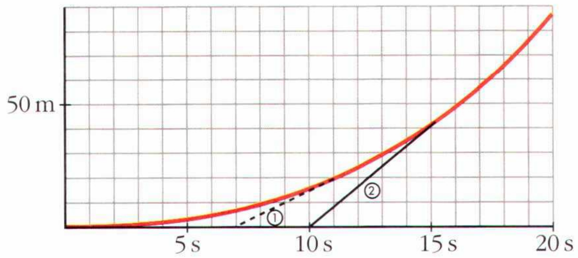


REFLEXIONA Y RESUELVE

Tomar un autobús en marcha

En la gráfica siguiente, la línea roja representa el movimiento de un autobús que arranca de la parada y va, poco a poco, ganando velocidad.

① y ② corresponden a pasajeros que llegan tarde y corren para tomar el autobús en marcha.



El pasajero ① llega a la parada 7 s después de que saliera el autobús, y lo alcanza 4 s más tarde, 20 m más allá.

Corrió a $\frac{20}{4} = 5$ m/s $\to$ $5 \cdot 3{,}6 = 18$ km/h

(Recuerda que para pasar de m/s a km/h, se multiplica por 3,6. Es decir, V m/s = $3{,}6V$ km/h).

La velocidad del autobús en el instante en que es alcanzado la hallaremos aproximadamente:

En el instante 10 s está a 16 m de la parada.

En el instante 12 s está a 25 m de la parada.

Velocidad media = $\frac{9 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 4{,}5$ m/s $= 16{,}2$ km/h

Puesto que el pasajero ① llega al autobús con una velocidad aproximadamente igual a la que este tiene en ese instante, accederá a él *suavemente*.

a) Al viajero ② lo acercan en bicicleta. Describe su movimiento y halla la velocidad a la que corre.

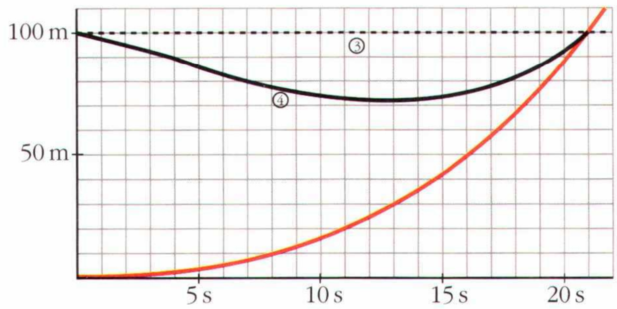
b) ¿Cuál es la velocidad aproximada del autobús en el momento que lo alcanza el pasajero ②?

¿Entra este pasajero *suavemente* en el autobús?

¿Es preferible esperar o correr tras el autobús?

Los viajeros ③ y ④, en el momento de la salida del autobús, estaban a 100 m de la parada. El ③ decide esperarlo y entrar en él cuando pase por allí.

El ④ tiene un extraño comportamiento. ¿Extraño?

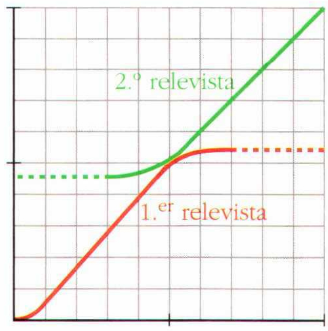


a) Describe el movimiento del pasajero ④.

b) Explica por qué el comportamiento del pasajero ④ es mucho más sensato que el del ③, quien tendrá muy difícil la entrada en el autobús.

Carrera de relevos

La siguiente gráfica refleja el comportamiento de dos atletas, del mismo equipo, durante una carrera de relevos:



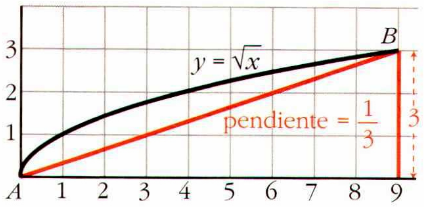
a) ¿Por qué en las carreras de relevos 4 × 100 m cada relevista empieza a correr antes de que llegue su compañero?

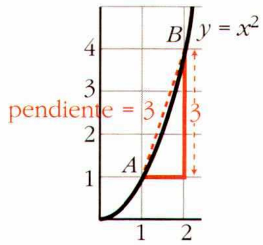
b) ¿Qué pasaría si esperara quieto la llegada del otro?

c) ¿Es razonable que las gráficas de sus movimientos sean tangentes?

¿Cómo son sus velocidades en el momento de la entrega del "testigo"?

12.1 CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO





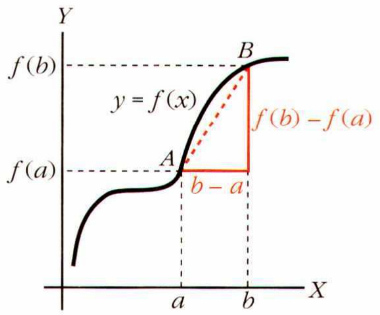
Las dos funciones de arriba, $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$, crecen lo mismo, 3 unidades, entre los puntos A y B.

Sin embargo, su *crecimiento medio* es muy distinto:

la primera, $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ la segunda, $\frac{3}{1} = 3$

En este apartado nos vamos a ocupar del estudio del crecimiento medio de una función en un intervalo.

Tasa de variación media

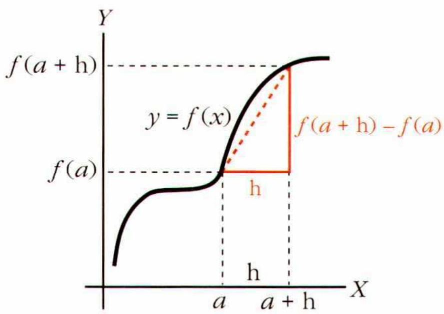


Se llama **tasa de variación media (T.V.M.)** de una función, $y = f(x)$, en un intervalo $[a, b]$ al cociente:

$$\frac{\text{variación de } f(x)}{\text{variación de } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{T.V.M. } [a, b]$$

La T.V.M. de $f(x)$ en $[a, b]$ es la **pendiente** del segmento que une los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$:

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

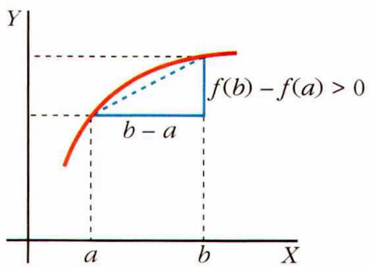


Con frecuencia, al intervalo se le designa mediante la expresión $[a, a + h]$, nombrando, así, a un extremo del intervalo, a, y a su longitud, h.

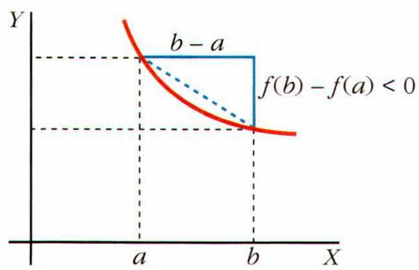
En tal caso, la tasa de variación media se obtiene así:

$$\text{T.V.M. } [a, a + h] = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Si una función es creciente en $[a, b]$, su tasa de variación media es positiva; y si es decreciente, negativa.



T.V.M. $[a, b] > 0$



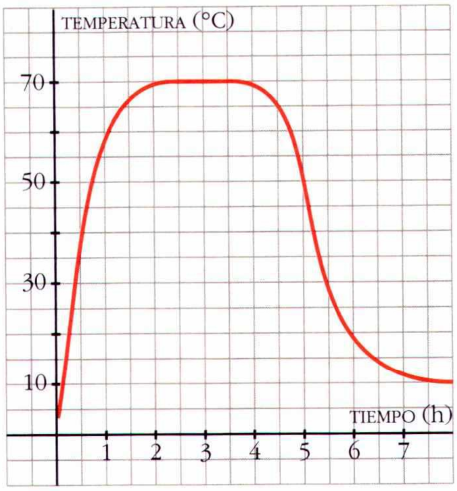
T.V.M. $[a, b] < 0$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *La gráfica adjunta muestra la temperatura de un radiador, alimentado por una caldera de carbón, desde que esta se enciende hasta ocho horas después.*

Hallar la T.V.M. en los intervalos [0, 2], [0, 1], [2,5; 3,5], [2, 4], [4, 8].

¿Cuál es su significado?



$$\text{T.V.M. } [0, 2] = \frac{70-4}{2} = 33$$

(Esto significa que la temperatura sube por término medio 33 °C cada hora en las dos primeras horas).

$$\text{T.V.M. } [0, 1] = \frac{60-4}{1} = 56$$

(Sube 56 °C en esa hora).

T.V.M. [2,5; 3,5] = 0

T.V.M. [2, 4] = 0

$$\text{T.V.M. } [4, 8] = \frac{10-70}{4} = -15$$

(Baja 15 °C, por término medio, cada hora en las últimas 4 horas).

2. *Hallar la T.V.M. de la función*

$$y = 5x - x^2$$

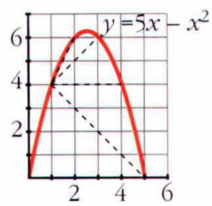
en los intervalos [1, 2], [1, 3], [1, 4] y [1, 5].

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{6-4}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{6-4}{2} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{4-4}{3} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{0-4}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$



3. *Hallar la T.V.M. de la función del ejercicio anterior en un intervalo con origen en el 1 y con longitud variable, h. Es decir, en el intervalo [1, 1 + h].*

$$f(1 + h) = 5(1 + h) - (1 + h)^2 = 5 + 5h - (1 + 2h + h^2) = 4 + 3h - h^2$$

$$f(1) = 5 \cdot 1 - 1^2 = 4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(4 + 3h - h^2) - 4}{h} =$$

$$= \frac{3h - h^2}{h} = 3 - h$$

Observa que, ahora, si damos a h los valores 1, 2, 3 y 4, respectivamente, obtenemos las T.V.M. obtenidas en los cuatro intervalos del ejercicio anterior.

EJERCICIOS PROPUESTOS

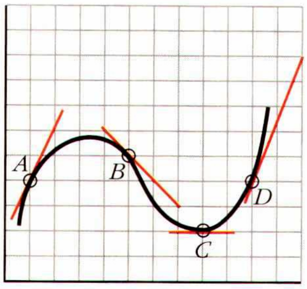
1. Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]

2. Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable [1, 1 + h].

Comprueba, dando a h los valores adecuados, que se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

12.2 CRECIMIENTO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. DERIVADA

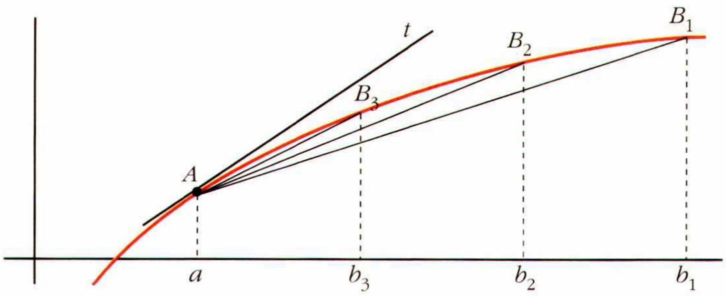


El crecimiento de una función en un punto viene dado, de forma natural, por el crecimiento (la pendiente) de la recta tangente a la curva en ese punto.

Así, la medida del crecimiento de la función adjunta en los puntos A, B, C y D es, respectivamente 2, –1, 0 y 2,5 (compruébalo).

En este apartado vamos a aprender a calcular el crecimiento en un punto de funciones dadas no ya gráficamente, sino mediante sus expresiones analíticas.

Relación del crecimiento en un punto con la T.V.M.



La T.V.M. de una función en un intervalo se interpreta como la pendiente de la cuerda correspondiente. Según esto, será:

T.V.M. $[a, b_1]$ = pendiente de AB_1

T.V.M. $[a, b_2]$ = pendiente de AB_2

T.V.M. $[a, b_3]$ = pendiente de AB_3

. . . .

RECUERDA

Recta secante: recta que corta.

La recta tangente, t, se obtiene como límite de las secantes AB_1, AB_2, AB_3, … Por tanto, su pendiente es el límite de las pendientes de las secantes, AB_i, cuando $B_i \to A$.

Derivada de una función en un punto

El crecimiento de una función en un punto se mide por la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de la función en ese punto. Se obtiene mediante el siguiente límite:

$$\text{CRECIMIENTO PUNTUAL DE } f \text{ en } a = \lim_{x \to a} \text{T.V.M. } [a, x] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

A este valor se le llama **derivada de *f* en *a***, se designa por $f'(a)$ y se lee f *prima* de a.

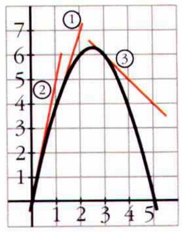
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar el valor de la derivada de la función $y = 5x - x^2$ en los puntos $x = 1$, $x = 0$ y $x = 3$.*

■ En $x = 1$: T.V.M. $[1, 1 + h] = 3 - h$ (la calculamos en la página 303).

Por tanto, $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} (3 - h) = 3$. ①



■ En $x = 0$: $$\text{T.V.M. } [0, h] = \frac{f(0 + h) - f(0)}{h - 0} = \frac{(5h - h^2) - 0}{h} = 5 - h$$

Por tanto, $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} (5 - h) = 5$. ②

■ En $x = 3$: $$\text{T.V.M. } [3, 3 + h] = \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{[5(3 + h) - (3 + h)^2] - [5 \cdot 3 - 3^2]}{h} =$$

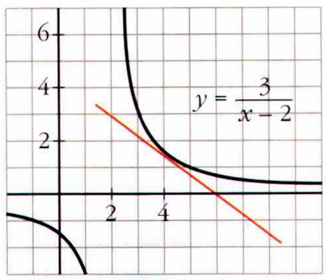
$$= \frac{(15 + 5h - 9 - 6h - h^2) - 6}{h} = \frac{-h - h^2}{h} = -1 - h$$

Por tanto, $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} (-1 - h) = -1$. ③

2. *Hallar la derivada de la función $y = \dfrac{3}{x - 2}$ en $x = 4$.*

Hemos de calcular:

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$$



$$f(4 + h) = \frac{3}{(4 + h) - 2} = \frac{3}{2 + h}$$

$$f(4) = \frac{3}{4 - 2} = \frac{3}{2}$$

$$f(4 + h) - f(4) = \frac{3}{2 + h} - \frac{3}{2} = \frac{6 - 3(2 + h)}{(2 + h) \cdot 2} = \frac{-3h}{4 + 2h}$$

$$\frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \frac{-3h}{4 + 2h} : h = \frac{-3}{4 + 2h}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{4 + 2h} = -\frac{3}{4}$$

$f'(4) = -\dfrac{3}{4}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 4.

EJERCICIOS PROPUESTOS

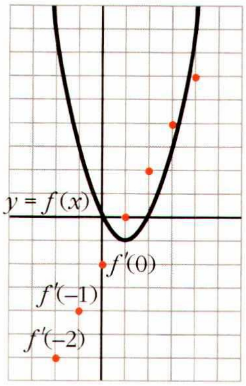
1. Halla la derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisas 4 y 5.

2. Halla la derivada de $y = \dfrac{3}{x - 2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.

3. Halla la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ en los puntos de abscisas –2, –1, 1 y 2.

4. Halla la derivada de $y = x^2 - 2x$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3 y 4.

12.3 FUNCIÓN DERIVADA DE OTRA



En el último ejercicio que se propone en la página anterior se pide calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$ en varios puntos. Los resultados son los siguientes:

x	–2	–1	0	1	2	3	4
f'(x)	–6	–4	–2	0	2	4	6

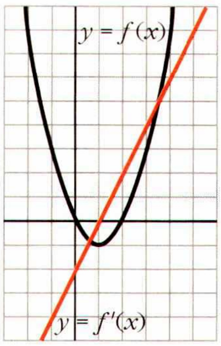
Observa que se trata de una nueva función, f', que asocia a cada abscisa, x, el valor de la pendiente (la derivada) de la función f en x.

$$x \longrightarrow f'(x) \quad [\text{pendiente de } f \text{ en } x]$$

La función f' se llama **función derivada** de f [el nombre de *derivada* viene de aquí, pues la función f' *deriva* (proviene) de la función f].

Los valores de la tabla anterior, $(-2, -6), \ldots, (4, 6)$, que son los puntos representados en rojo en la gráfica, corresponden a la recta $y = 2x - 2$.

Es decir, la función derivada de $f(x) = x^2 - 2x$ es $f'(x) = 2x - 2$.



Para probarlo, vamos a obtener la derivada de $f(x) = x^2 - 2x$ en un punto cualquiera, x, paso a paso, como lo hicimos en los ejercicios resueltos de la página anterior:

$$f(x + h) = (x + h)^2 - 2(x + h) = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h$$

$$f(x + h) - f(x) = (x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h) - (x^2 - 2x) = 2xh + h^2 - 2h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 2) = 2x - 2$$

Por tanto, hemos obtenido que $f'(x) = 2x - 2$, como habíamos previsto.

Se llama **función derivada de *f*** (o simplemente **derivada de *f***) a una función f' que asocia a cada abscisa, x, la derivada de f en ese punto, $f'(x)$, es decir, la pendiente de la curva $y = f(x)$ en ese punto. A la derivada de f la llamaremos f' o bien Df.

$$Df(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla la derivada de la función $f(x) = 5x - x^2$ y comprueba que, a partir de ella, se pueden obtener los valores concretos hallados en el ejercicio resuelto 1 y en el ejercicio propuesto 1 de la página anterior.

2. Halla la derivada de $f(x) = x^3$.

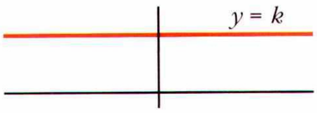
3. Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$ y comprueba que, a partir de ella, se pueden obtener los valores concretos calculados en el ejercicio resuelto 2 y en el ejercicio propuesto 2 de la página anterior.

4. Halla la función derivada de $y = x^3 + x^2$.

12.4 REGLAS PARA OBTENER LAS DERIVADAS DE ALGUNAS FUNCIONES

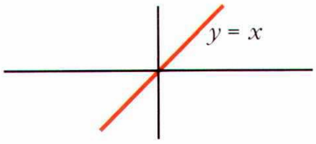
En la página anterior hemos calculado la derivada de algunas funciones aplicando la definición de derivada. El proceso es largo y pesado. Sin embargo, existen unas sencillas reglas prácticas con las que se puede hallar, muy fácilmente, la derivada de cualquier función elemental.

Todas las reglas que vamos a dar se pueden demostrar, pero eso lo dejaremos para el próximo curso. Ahora, nos limitaremos a dar las reglas y a entender cómo se ponen en práctica.



Derivada de una función constante

$\boxed{D(k) = 0}$ pues la pendiente de $y = k$ es cero en todos sus puntos.



Derivada de x

$\boxed{D(x) = 1}$ pues la recta $y = x$ tiene pendiente 1 en todos sus puntos.

Derivada de una función potencia x^n

$\boxed{D(x^n) = n\,x^{n-1} \text{ siendo } n \text{ un número cualquiera}}$

DERIVADA DE POTENCIAS

Esta regla es mucho más útil de lo que parece a simple vista, pues hay muchos tipos de funciones que se pueden poner en forma de potencia.

Por ejemplo:

$$D(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4$$

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = D(x^{-1}) = -1x^{-1-1} = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$D(\sqrt{x^3}) = D(x^{3/2}) = \frac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$D(\sqrt{x}\,/\,x^3) = D(x^{(1/2)-3}) = D(x^{-5/2}) = -\frac{5}{2}x^{-7/2} = \frac{-5}{2\sqrt{x^7}}$$

Derivada del producto de un número por una función, $k \cdot f(x)$

$\boxed{D[k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)}$

Por ejemplo:

$$D(6x^5) = 6 \cdot D(x^5) = 6 \cdot 5x^4 = 30x^4$$

$$D\left(\frac{3}{2x}\right) = \frac{3}{2}D\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{2x^2}$$

DERIVADA DE POLINOMIOS

Con esta regla y las anteriores, podemos derivar cualquier función polinómica.

Derivada de la suma de funciones, $f(x) + g(x)$

$\boxed{D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)}$

Por ejemplo:

$$D(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) = D(x^3) + D(-6x^2) + D(9x) + D(-4) =$$

$$= 3x^2 - 12x + 9$$

Derivada de las funciones trigonométricas

$D\,sen\,x = cos\,x$ $D\,cos\,x = -sen\,x$ $D\,tg\,x = 1 + tg^2\,x = \dfrac{1}{cos^2\,x}$

Derivada de las funciones arco

$D\,arc\,sen\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D\,arc\,cos\,x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D\,arc\,tg\,x = \dfrac{1}{1+x^2}$

NÚMERO *e*

Recuerda que *e* es un número irracional:
$e = 2{,}718281...$

Derivada de las funciones exponenciales

$De^x = e^x$ $Da^x = a^x \cdot ln\,a$

Por ejemplo: $D\,2^x = 2^x \cdot ln\,2$; $D\,10^x = 10^x \cdot ln\,10$

LOGARITMO NEPERIANO

Recuerda que $ln\,x = log_e\,x$.

Derivada de las funciones logarítmicas

$D\,ln\,x = \dfrac{1}{x}$ $D\,log_a\,x = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln\,a}$

Por ejemplo: $D\,log_2\,x = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln\,2}$; $D\,log_{10}\,x = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{ln\,10}$

Derivada del producto de dos funciones

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Por ejemplo: $D(x^2\,sen\,x) = 2x\,sen\,x + x^2\,cos\,x$

Derivada del cociente de dos funciones

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$$D\left[\frac{sen\,x}{x^2}\right] = \frac{(cos\,x) \cdot x^2 - (sen\,x)\,2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2\,cos\,x - 2x\,sen\,x}{x^4}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

5. $f(x) = sen\,x\,cos\,x$

6. $f(x) = tg\,x$

7. $f(x) = x\,e^x$

8. $f(x) = x \cdot 2^x$

9. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot log_2\,x$

10. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

11. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$

12. $f(x) = \dfrac{log\,x}{x}$

Derivada de una función compuesta. Regla de la cadena

$$\boxed{D[(g \circ f)(x)] = Dg[f(x)] = g'[f(x)] \cdot f'(x)}$$

Por ejemplo: $D\sqrt{3x+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{3x+1}} \cdot 3$, pues $\begin{cases} D\sqrt{\ } = 1/2\sqrt{\ } \\ D(3x+1) = 3 \end{cases}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar la función derivada de:*

a) $f(x) = sen\,\sqrt{x}$

b) $f(x) = cos\,x^2$

c) $f(x) = tg\,(2x + \pi)$

d) $f(x) = (sen\,x)^2 = sen^2\,x$

e) $f(x) = e^{3x-5}$

f) $f(x) = arc\,tg\,(x^2 - 2x)$

g) $f(x) = ln\,\sqrt{x}$

h) $f(x) = sen^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

a) $D\,sen\,\sqrt{x} = cos\,\sqrt{x} \cdot D\sqrt{x} = (cos\,\sqrt{x}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

b) $D\,cos\,x^2 = -sen\,(x^2) \cdot Dx^2 = (-sen\,x^2) \cdot 2x = -2x\,sen\,x^2$

c) $D\,tg\,(2x+\pi) = [1 + tg^2(2x+\pi)] \cdot D(2x+\pi) = [1 + tg^2(2x+\pi)] \cdot 2$

d) La última función que actúa, que es la primera que se deriva, es *el cuadrado.*

$D\,sen^2\,x = D(sen\,x)^2 = 2 \cdot sen\,x \cdot D(sen\,x) = 2\,sen\,x(cos\,x) =$
$= 2\,sen\,x\,cos\,x$

e) $D\,e^{3x-5} = e^{3x-5} \cdot D(3x-5) = e^{3x-5} \cdot 3 = 3e^{3x-5}$

f) $D\,arc\,tg\,(x^2-2x) = \dfrac{1}{1+(x^2-2x)^2} \cdot D(x^2-2x) = \dfrac{2x-2}{1+(x^2-2x)^2} =$
$= \dfrac{2x-2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1}$

g) $D\,ln\,\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot D(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2x}$

Recuerda que el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base. Por tanto:

$ln\,\sqrt{x} = ln\,x^{1/2} = \dfrac{1}{2}\,ln\,x \to D\left(\dfrac{1}{2}\,ln\,x\right) = \dfrac{1}{2} \cdot D\,ln\,x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$

Hemos llegado, así, al mismo resultado, como es natural.

h) $D\,sen^2\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\,sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot D\left[sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

$D\left[sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right] = cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot D\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) = cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3$

Por tanto: $D\,sen^2\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\,sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

13. $f(x) = sen\,(x^2 - 5x + 7)$

14. $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{2/3}$

15. $f(x) = sen\,(3x+1) \cdot cos\,(3x+1)$

16. $f(x) = \dfrac{log\,x^2}{x}$

17. $f(x) = cos\,(3x - \pi)$

18. $f(x) = \sqrt{1+2x}$

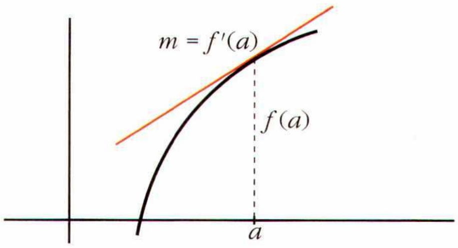
19. $f(x) = x\,e^{2x+1}$

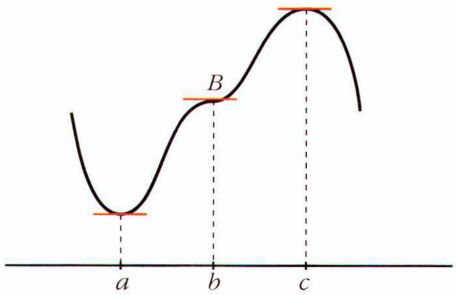
20. $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

12.5 UTILIDAD DE LA FUNCIÓN DERIVADA

La **recta tangente** a $y = f(x)$ en el punto de abscisa a y ordenada $f(a)$ es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$





El punto B es singular, pero no es máximo ni mínimo relativo.

Cuando una función nos viene dada por su expresión analítica, $y = f(x)$, su derivada, $f'(x)$, nos da la inclinación (la pendiente) de la curva en cada punto. Veamos, en concreto, algunas de sus aplicaciones.

- **Cálculo de la derivada de una función en varios puntos**

  Para hallar $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$, …, se procede así:

  - Se obtiene la expresión general de $f'(x)$.
  - Se sustituye en $f'(x)$ la x por $a, b, c, \ldots$

- **Obtención de las abscisas en las cuales la derivada tiene un cierto valor**

  Para averiguar los valores de x tales que $f'(x) = k$, se procede así:

  - Se obtiene la expresión general de $f'(x)$.
  - Se resuelve la ecuación $f'(x) = k$.

- **Obtención de las abscisas de los puntos singulares**

  Se llaman **puntos singulares** a los puntos de tangente horizontal, es decir, a los puntos en los que **la derivada es cero**. Entre ellos están los máximos y mínimos relativos, pero puede haber otros.

  Las abscisas de los puntos singulares son las soluciones de $f'(x) = 0$.

- **Obtención de tramos en donde la curva crece o decrece**

  Si $f'(x) > 0$, la función es creciente, y si $f'(x) < 0$, la curva es decreciente. Por tanto, resolviendo tales inecuaciones se obtienen los intervalos donde la curva crece o decrece.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Dada la función* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$:

a) Hallar la derivada de la función en los puntos -1, 0, 2 *y* 4.

b) Hallar la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$.

c) Averiguar las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) En $x = 4$, *¿es creciente o decreciente?*

a) La función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 12(-1) + 9 = 24$, $f'(0) = 9$, $f'(2) = -3$, $f'(4) = 9$

b) Conocemos $f'(2) = -3$. Hallamos $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 2 = 4$.

La ecuación es: $y = 4 - 3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 10$

c) Hallamos los puntos de tangente horizontal, **puntos singulares**, resolviendo $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6}, \quad x_1 = 1, \; x_2 = 3$$

En los puntos de abscisas 1 y 3 puede haber máximo o mínimo relativo.

d) Puesto que $f'(4) = 9 > 0$, la curva es creciente en $x = 4$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y halla:

a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas -1, 1 y 3.

b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

c) Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x = 2$?

LENGUAJE MATEMÁTICO

CÓMO NOMBRAMOS LAS FUNCIONES Y SUS DERIVADAS

Funciones y variables

Para nombrar una función, utilizamos una letra. Por ejemplo, f, g, h, … Una función liga dos variables. Por ejemplo, x e y. Ponemos $y = f(x)$.

Parámetros

Para designar el valor que toma una función f para un cierto valor de x, por ejemplo, 4, ponemos $f(4)$. Pero si no queremos concretar ese valor de x, entonces ponemos a o c u otra letra que no desempeñe, habitualmente, el papel de "variable": $f(a)$, $f(c)$, … Pero ¿acaso a o c no son variables? Sí, lo son porque *varían*, es decir, pueden tomar valores variados. Pero no son *la variable* de la función. A estas letras las llamamos *parámetros*.

Función derivada

Si f es una función derivable, su derivada es, obviamente, otra función. Sabes que se designa f' (*f prima*).

Prima significa *primera* (míralo en el diccionario). La función derivada de f', que se designaría $(f')'$ se llama *derivada segunda* de f y se denota simplemente así: f'' (*f segunda*). Análogamente, $(f'')' = f'''$ (la derivada de f'' es *f tercera*).

Estos símbolos fueron, en principio, otros: f^{I}, f^{II}, f^{III}. El uso fue desfigurando los números romanos, que acabaron transformándose en apóstrofos. Las derivadas posteriores se designan f^{IV}, f^{V}, f^{VI}, …

¿Se pone f' o Df?

f' es el nombre de una nueva función. Df es la orden de derivar la función f y el resultado es f', es decir, $Df = f'$. Según esto, podemos poner $D(x^3 - 3x + \cos x)$, pero no es correcto poner $(x^3 - 3x + \cos x)'$, aunque a veces se pone y no es demasiado grave.

¿Es correcto poner y'?

Cuando ponemos

$$y = x^2 - 5x + 3 \quad \to \quad y' = 2x - 5$$

estamos identificando la variable y con la función. Esto es válido y en matemática superior se usa con frecuencia. No obstante, creemos que en este nivel es preferible reservar la y como nombre de la variable dependiente en exclusiva. De este modo, cuando se desea derivar una función como la anterior, o bien le ponemos un nombre:

$$f(x) = x^2 - 5x + 3 \quad \to \quad f'(x) = 2x - 5$$

o bien utilizamos la orden D:

$$D(x^2 - 5x + 3) = 2x - 5$$

EJERCICIOS

1. En la fórmula que sirve para hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

di el papel que desempeña cada una de las letras que intervienen. La x es la variable independiente, ¿de qué función?

12.6 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES POLINÓMICAS

Las funciones polinómicas son de la forma $y = P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio. Por ejemplo:

$$y = x^3 - 3x^2 + 7 \qquad\qquad y = 3x^4 - 6x^3$$

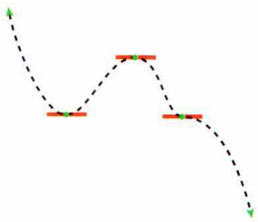
Son funciones **continuas**, con solo dos **ramas infinitas** (en $-\infty$ y en $+\infty$).

Si además de conocer sus ramas infinitas localizamos *todos* sus puntos de tangente horizontal (**puntos singulares**), podremos representarlas con mucha precisión.

TEN EN CUENTA

Las funciones lineales, $y = ax + b$, y las cuadráticas, $y = ax^2 + bx + c$, son polinómicas de 1º y 2º grados, respectivamente, y sabemos representarlas con sencillez.

Aquí nos ocuparemos de las de grado superior.



Con los puntos singulares y las ramas infinitas se aprecia claramente la forma de la curva.

Para representar una función polinómica, $y = P(x)$, de grado mayor que dos:

- Se hallan sus dos ramas infinitas: $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x)$.
- Se resuelve la ecuación $P'(x) = 0$. Sus soluciones, si las hay, son las abscisas de sus puntos singulares. A continuación, se obtienen sus ordenadas.
- Se unen los puntos obtenidos entre sí y con las ramas infinitas, cuidando no dibujar otros puntos singulares que los ya obtenidos. De este modo se averigua cuáles son los máximos y mínimos relativos.
- Si se puede, conviene obtener, también, los puntos de corte con los ejes para conseguir mayor precisión en la representación.

EJERCICIOS RESUELTOS

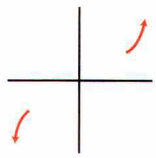
1. *Representar la siguiente función polinómica:*

$$y = x^3 - 3x^2 + 4$$

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = +\infty$$



- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff (3x - 6)x = 0$. Soluciones: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

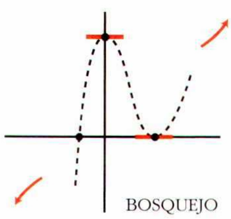
$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \to f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 4 = 4 \\ x_2 = 2 \to f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4 = 0 \end{array}\right\}$ Los puntos singulares son (0, 4) y (2, 0).

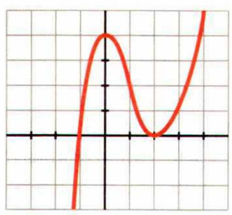
- Cortes con los ejes:

Con el eje X: $f(x) = 0 \iff x^3 - 3x^2 + 4 = 0$. Soluciones: $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Al eje Y lo corta en (0, 4).

- Representación:





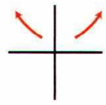
$y = x^3 - 3x^2 + 4$

2. *Representar la siguiente función:*

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$$

- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100) = +\infty$

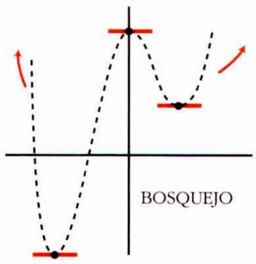
  $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100) = +\infty$

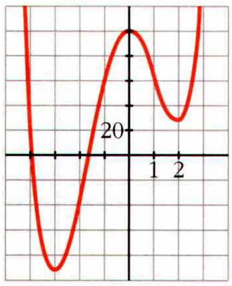


- Puntos singulares:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x \\ f'(x) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3 \\ f(0) = 100,\ f(2) = 36,\ f(-3) = -89 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-3, -89),\ (0, 100) \\ \text{y}\ (2, 36) \end{array}$$

- Representación:





$y = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$

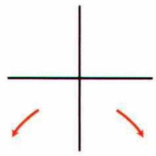
Los cortes con el eje X no sabemos calcularlos. Para dibujar la curva con más precisión, hallaremos otros puntos: $(-4, 36)$, $(-2, -28)$, $(-1, 63)$, …

3. *Representar la siguiente función:*

$$y = -3x^4 + 4x^3$$

- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^4 + 4x^3) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^4 + 4x^3) = -\infty$



- Puntos singulares:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -12x^3 + 12x^2 \\ f'(x) = 0 \iff -12x^2(x - 1) = 0 \iff x_1 = 0,\ x_2 = 1 \\ f(0) = 0,\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (0, 0) \\ (1, 1) \end{array}$$

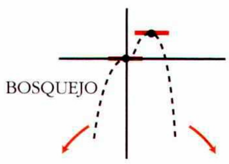
- Cortes con los ejes:

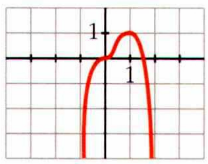
Eje X: $f(x) = 0 \iff x^3(-3x + 4) = 0$. Soluciones: 0 y 4/3

Corta al eje X en los puntos $(0, 0)$ y $(4/3, 0)$.

Eje Y: Corta al eje Y en $(0, 0)$.

- Representación:





$y = -3x^4 + 4x^3$

Baja muy rápidamente, pero no tiene asíntotas verticales.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

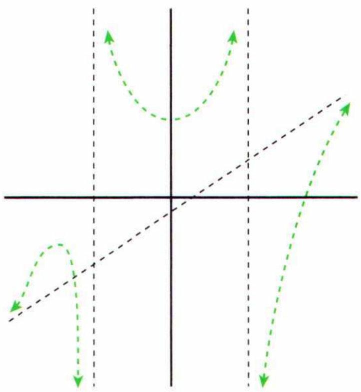
b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

c) $y = x^4 + 4x^3$

12.7 REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

TEN EN CUENTA

Las funciones $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ son también racionales, pero se trata de modelos sencillos que ya sabemos representar mediante hipérbolas equiláteras. Aquí aprenderemos a representar otras más complicadas.



En las funciones racionales, conociendo las asíntotas y la posición de la curva respecto a ellas, podemos realizar un bosquejo en el que se aprecie claramente la forma de la curva.

Las funciones racionales son de la forma $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Por ejemplo:

$$y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} \qquad y = \frac{x^3}{x^2 + 1} \qquad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Las que vamos a tratar aquí son de un nivel de dificultad similar a las anteriores, con denominadores de grado uno o dos. Todas ellas tienen la curiosa peculiaridad de que *conociendo perfectamente todas sus ramas infinitas, podremos hacer un bosquejo muy aproximado de la curva.*

Para representar una función racional simplificada, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, hallaremos:

1. Asíntotas verticales. Las raíces del denominador (soluciones de la ecuación $Q(x) = 0$) son las abscisas de las asíntotas verticales. Se obtienen junto con la posición de la curva respecto a ellas.

2. Asíntotas horizontales y oblicuas

- Si *grado de* $P(x) \le$ *grado de* $Q(x)$, hay asíntota horizontal.
- Si *grado de* $P(x) =$ *grado de* $Q(x) + 1$, hay asíntota oblicua.

Si la hay, se halla la asíntota horizontal u oblicua y la posición de la curva respecto a ella.

- Si *grado de* $P(x) -$ *grado de* $Q(x) > 1$, no hay asíntota horizontal ni oblicua, pero sí ramas infinitas en $\pm\infty$. Se hallan.

Con todas estas ramas infinitas casi siempre se puede hacer un bosquejo muy aproximado a la forma de la curva.

3. Puntos singulares. Sus abscisas son las soluciones de $f'(x) = 0$.

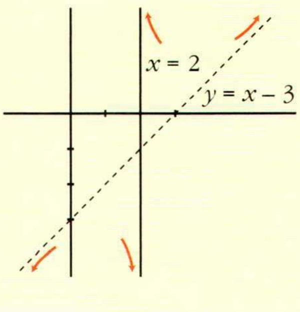
4. Otros puntos. Se pueden obtener si se quiere más precisión.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Representar la función*

$$y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

de la cual conocemos sus asíntotas y la posición de la curva respecto a ella:



Observando el bosquejo, sabemos que hay un máximo relativo a la izquierda de $x = 2$ y un mínimo relativo a la derecha de $x = 2$. Obtengámoslos:

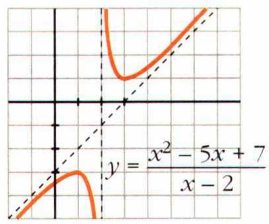
$$f'(x) = \frac{(2x - 5)(x - 2) - (x^2 - 5x + 7) \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3,\ x = 1;\quad f(3) = 1,\ f(1) = -3$

Los puntos singulares son $(3, 1)$ y $(1, -3)$.

Al representar la curva con estos resultados, observamos que $(3, 1)$ es mínimo relativo y $(1, -3)$ es máximo relativo.

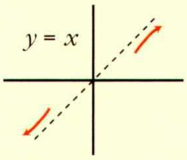
La curva no corta al eje X: $x^2 - 5x + 7 = 0$ no tiene soluciones.



2. *Representar la función*

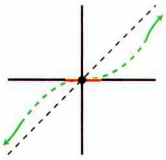
$$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

de la cual sabemos que no tiene asíntotas verticales y conocemos su asíntota oblicua:



Como no tiene asíntotas verticales, conviene hallar sus puntos singulares antes de realizar un bosquejo de la curva.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \ldots = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$$



$f'(x) = 0 \iff x^2 = 0$ o $x^2 + 3 = 0 \iff x = 0$

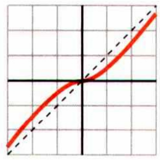
Único punto singular: (0, 0).

No corta a los ejes coordenados en ningún otro punto.

Obtenemos más puntos:

(1; 0,5), (2; 1,6), (3; 2,7) (–1; –0,5), (–2; –1,6), (–3; –2,7)

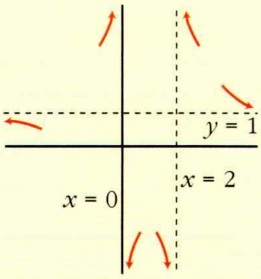
Ya podemos representarla con mucha precisión.

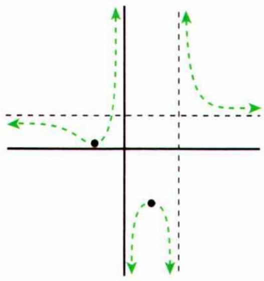


3. *Representar la función*

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$$

de la cual conocemos las asíntotas verticales, la horizontal y la posición de la curva respecto a ellas:





Con los datos anteriores, podemos realizar este bosquejo y, a partir de él, deducimos que la curva tendrá un mínimo a la izquierda de 0 y un máximo entre 0 y 2.

Veamos su localización, así como si hay otros puntos singulares además de estos.

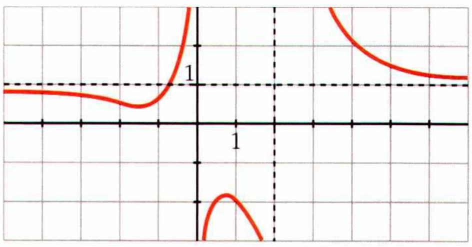
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2x) - (x^2 + 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \ldots = \frac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2 - 2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff -2x^2 - 2x + 2 = 0$$

Soluciones: $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62$, $\;x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}62$

$$f(-1{,}62) \approx 0{,}62, \quad f(0{,}62) \approx -1{,}62$$

Los únicos puntos singulares son (–1,62; 0,62) y (0,62; –1,62). Con ellos podemos completar la representación:



En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (1) y con **CALCULADORA GRÁFICA** (2) algunos aspectos de esta unidad.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

e) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

f) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

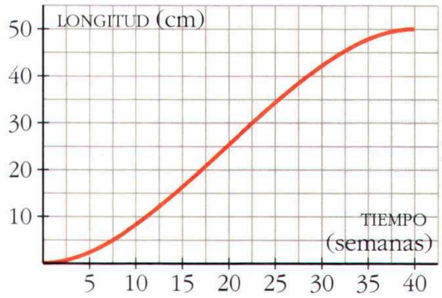
EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1 Tasa de variación media

En la gráfica adjunta se muestra la longitud del feto durante el embarazo.

Es una función creciente; sin embargo, la rapidez de crecimiento no es la misma en todo el embarazo.

Estudia el crecimiento medio en los intervalos [0, 10] y [10, 20] y di en qué periodo crece más rápidamente.



Calculamos la tasa de variación media en los intervalos [0, 10], [10, 20]:

$$\text{T.V.M. } [0, 10] = \frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = \frac{7,5 - 0}{10} = 0,75$$

Crece 0,75 cm por semana.

$$\text{T.V.M. } [10, 20] = \frac{25 - 7,5}{10} = 1,75 \rightarrow \text{Crece } 1,75 \text{ cm por semana.}$$

Entre las semanas 10 y 20 el crecimiento es más rápido, 1,75 cm por semana.

2 Derivada en un punto

Calcula la derivada de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

en el punto $x = 1$, aplicando la definición.

Hallamos la T.V.M. en el intervalo $[1, 1 + h] = \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$

$$f(1 + h) = \frac{1}{(1 + h)^2 + 1} = \frac{1}{2 + 2h + h^2}$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-2h - h^2}{4 + 4h + 2h^2} : h = \frac{-2h - h^2}{(4 + 4h + 2h^2)\,h} = \frac{-2 - h}{4 + 4h + 2h^2}$$

Calculamos $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 - h}{4 + 4h + 2h^2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

3 Reglas de derivación

Halla la función derivada de:

a) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}}$

b) $y = \left(\dfrac{3x}{2} - 5\right)^4$

c) $y = \dfrac{3x - 7}{x + 2}$

d) $y = e^{-x}\, ln(\cos x)$

e) $y = \sqrt{tg\, x}$

f) $y = ln\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)$

a) La expresamos como potencia:

$$f(x) = x^{-2/3} \rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3} x^{-5/3} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}} = \frac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$$

b) $f'(x) = 4\left(\dfrac{3x}{2} - 5\right)^3 \cdot \dfrac{3}{2} = 6\left(\dfrac{3x}{2} - 5\right)^3$

Hemos aplicado $D[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$.

c) Es un cociente $\rightarrow f'(x) = \dfrac{3(x + 2) - (3x - 7) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \dfrac{13}{(x + 2)^2}$

d) Derivamos como producto:

$$f'(x) = -e^{-x}\, ln(\cos x) + e^{-x}\left(\frac{-sen\, x}{\cos x}\right) = -e^{-x}\,[ln(\cos x) + tg\, x]$$

e) $f(x) = (tg\, x)^{1/2} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}(tg\, x)^{-1/2}\,(1 + tg^2\, x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2\sqrt{tg\, x}}$

f) $f(x) = ln\,(x+1) - ln\, x$ (por la propiedad del logaritmo de un cociente):

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2 + x}$$

4 Ecuación de la recta tangente

Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

en el punto de abscisa 1.

Sabemos que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ es $f'(1)$. La ecuación de la recta tangente la escribimos utilizando la forma punto-pendiente: $y = f(1) + f'(1)\,(x-1)$.

- Hallamos el punto de tangencia: $x = 1;\ f(1) = -\dfrac{2}{3} \rightarrow P\left(1, -\dfrac{2}{3}\right)$
- La pendiente de la tangente la obtenemos calculando el valor de la derivada en el punto de tangencia:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} \rightarrow f'(1) = \frac{5}{9}$$

- Escribimos la ecuación de la recta tangente:

$$y = -\frac{2}{3} + \frac{5}{9}(x-1) \rightarrow \boxed{5x - 9y - 11 = 0}$$

5 Máximos y mínimos

Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función:

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16$$

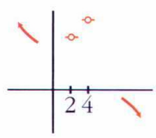
Con la ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y haz la gráfica de $f(x)$.

- En los puntos de tangente horizontal, la derivada es igual a 0.

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 8 \rightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = -\frac{8}{3} + 12 - 16 + 16 = \frac{28}{3}$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = -\frac{64}{3} + 48 - 32 + 16 = \frac{32}{3}$$



- Ramas infinitas: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x + 16\right) = +\infty$

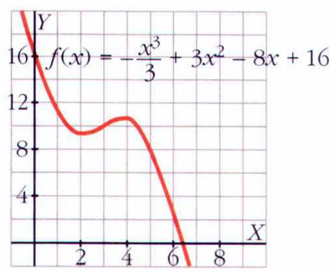
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$\left(2, \dfrac{28}{3}\right)$ es mínimo. $\left(4, \dfrac{32}{3}\right)$ es máximo.

- Puntos de corte con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 16;\ (0, 16)$

No podemos determinar en qué punto corta a OX porque no sabemos resolver la ecuación $f(x) = 0$. Dando valores a x, podemos comprobar que el punto de corte está entre $x = 6$ y $x = 7$.



EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

6 Gráfica de una función polinómica

De una función polinómica sabemos que:

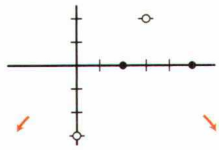
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

- ***Tiene tangente horizontal en (0, –3) y en (3, 2).***
- ***Corta al eje OX en (2, 0) y en (5, 0).***

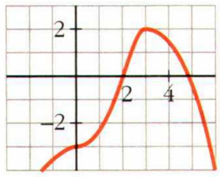
Represéntala gráficamente y di si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

Sabemos que la función es continua por ser polinómica, y tenemos toda la información necesaria para hacer la gráfica.



Representamos esta información y observamos que el punto (3, 2) es un máximo y el punto (0, –3) no es máximo ni mínimo.

Uniendo esos puntos y teniendo en cuenta las ramas infinitas, la gráfica es como ves debajo.



7 Gráficas de funciones racionales

a) Representa una función $y = f(x)$ tal que:

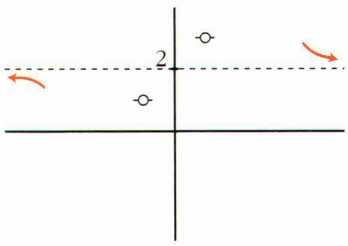
- ***Es continua en*** $\mathbb{R}$.
- ***Asíntota horizontal:***

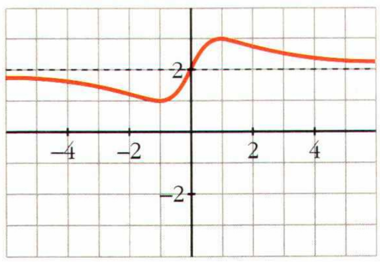
  $y = 2$

  $\begin{cases} \text{si } x \to +\infty,\ f(x) > 2 \\ \text{si } x \to -\infty,\ f(x) < 2 \end{cases}$

- ***Tiene tangente horizontal en (1, 3) y en (–1, 1).***

a)





b) Representa una función $y = f(x)$ tal que:

- ***Su dominio de definición es*** $\mathbb{R} - \{0\}$.
- ***Corta al eje X en $x = 1$.***
- ***Asíntota vertical:***

  $x = 0$

  $\begin{cases} \text{si } x \to 0^-,\ f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to 0^+,\ f(x) \to +\infty \end{cases}$

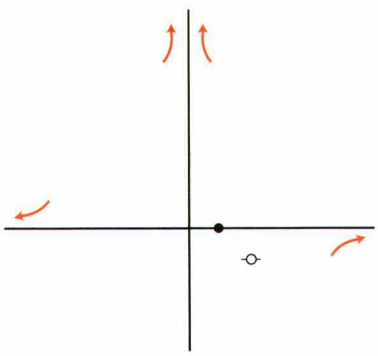
- ***Asíntota horizontal:***

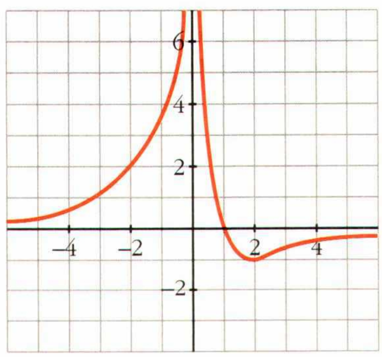
  $y = 0$

  $\begin{cases} \text{si } x \to +\infty,\ f(x) < 0 \\ \text{si } x \to -\infty,\ f(x) > 0 \end{cases}$

- ***Tiene tangente horizontal en (2, –1).***

b)





8 Estudio y representación de una función

Estudia y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$$

■ Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

■ Asíntota vertical: $x = 0$. Posición $\left\langle \begin{array}{l} \text{si } x \to 0^-, \ f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to 0^+, \ f(x) \to -\infty \end{array} \right.$

■ No tiene asíntota horizontal, puesto que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - 4}{x} = \pm\infty$.

■ Tiene asíntota oblicua porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador. Para obtenerla, dividimos:

$y = \dfrac{x^2 - 4}{x} = x - \dfrac{4}{x}$ La asíntota es $y = x$.

Posición $\left\langle \begin{array}{l} \text{si } x = 100 \to f(x) = 99{,}96 < 100 \\ \text{si } x = -100 \to f(x) = -99{,}96 > -100 \end{array} \right.$

Por tanto: cuando $x \to +\infty$, la curva está bajo la asíntota.

cuando $x \to -\infty$, la curva está sobre la asíntota.

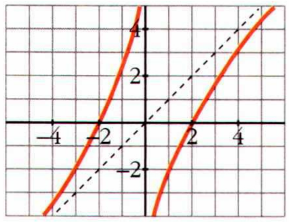
■ Puntos singulares: se obtienen haciendo $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 4)}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2} = 0 \to \text{No tiene solución.}$$

No tiene puntos singulares.

Observamos que $f'(x)$ es positiva en todo su dominio y, por tanto, $f(x)$ es creciente para todo x.

Corta al eje X en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.



9 Determinación de una función

Halla los coeficientes a, b y c de la función

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

sabiendo que pasa por (0, 5) y que tiene un punto de tangente horizontal en (2, –3).

- La función pasa por $(0, 5)$: $f(0) = 5 \to a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \to c = 5$
- $(2, -3)$ es un punto singular: $f'(2) = 0$

  Derivamos: $f'(x) = 2ax + b \to 2a \cdot 2 + b = 0 \to 4a + b = 0$
- $(2, -3)$ es un punto de la función: $f(2) = -3 \to 4a + 2b + c = -3$

$\left.\begin{array}{l} c = 5 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = -8 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} c = 5 \\ b = -8 \\ a = 2 \end{array}\right\}$ La función es $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$, una parábola con vértice en $(2, -3)$.

10 Crecimiento y decrecimiento de una función

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:

$$y = x^3 - 3x^2$$

Si $f'(x) > 0$, la función crece, y si $f'(x) < 0$, decrece.

$f'(x) = 3x^2 - 6x \to 3x^2 - 6x = 0 \to 3x(x - 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Descomponemos la recta en intervalos y estudiamos el signo de $f'(x)$:

$f' > 0$ $f' < 0$ $f' > 0$

↗ 0 ↘ 2 ↗

Crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
Decrece en $(0, 2)$
$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ $(0, 0)$ máximo
$(2, -4)$ mínimo

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

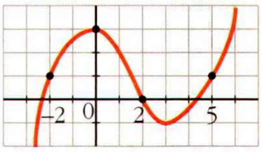
Tasa de variación media

1 Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:

a) $[-2, 0]$

b) $[0, 2]$

c) $[2, 5]$



2 Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo $[1, 3]$ e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a) $f(x) = 1/x$ b) $f(x) = (2 - x)^3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$ d) $f(x) = 2^x$

☛ *Si la T.V.M. es positiva, la función crece.*

3 Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, halla la tasa de variación media en el intervalo $[2, 2 + h]$.

4 Comprueba que la T.V.M. de la función $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$ es igual a $-h + 3$. Calcula la T.V.M. de esa función en los intervalos $[1, 2]$, $[1; 1{,}5]$, utilizando la expresión anterior.

5 Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos $[2, 3]$ y $[3, 4]$, y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

Definición de derivada en un punto

6 Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(-2)$ y $f'(3)$, siendo $f(x) = \dfrac{2x - 3}{5}$.

7 Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:

a) $f(x) = 3x^2 - 1$ b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$ d) $f(x) = 1/(x + 2)$

8 Halla el valor del crecimiento de $f(x) = (x - 3)^2$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$, aplicando la definición de derivada.

9 Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 1$ en el punto de abscisa $x = -2$, utilizando la definición de derivada.

10 Halla la pendiente de la tangente a la curva $y = 4x - x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$, aplicando la definición de derivada.

11 Comprueba, utilizando la definición de derivada en cada caso:

a) $f(x) = 5x \rightarrow f'(x) = 5$

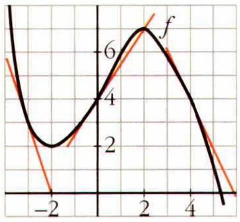
b) $f(x) = 7x^2 \rightarrow f'(x) = 14x$

c) $f(x) = x^2 + x \rightarrow f'(x) = 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{3}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{-3}{x^2}$

12 Halla f' en los puntos de abscisas -3, 0 y 4.

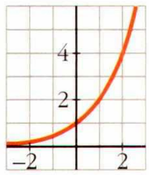
☛ *Halla las pendientes de las rectas tangentes trazadas en esos puntos.*



13 Indica, en la gráfica del ejercicio anterior, los puntos en los que la derivada es cero. En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

14 ¿Existe algún punto en esta función en el que la derivada sea negativa?

Ordena de menor a mayor los valores de $f'(-2)$, $f'(2)$ y $f'(0)$.



Reglas de derivación

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

15 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6;\ x = 1$

16 $f(x) = \cos(2x + \pi);\ x = 0$

17 $f(x) = \dfrac{x}{3} + \sqrt{2};\ x = -\dfrac{17}{3}$

18 $f(x) = \dfrac{1}{7x + 1};\ x = 0$

19 $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2};\ x = \pi$

20 $f(x) = \dfrac{2}{(x + 3)^3};\ x = -1$

21 $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{x}{2};\ x = 2$

22 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$; $x = 8$

23 $f(x) = x\,sen\,(\pi - x)$; $x = \dfrac{\pi}{2}$

24 $f(x) = (5x-2)^3$; $x = \dfrac{1}{5}$

25 $f(x) = \dfrac{x+5}{x-5}$; $x = 3$

Halla la función derivada de estas funciones:

26 a) $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $f(x) = (x^2-3)^3$

27 a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

28 a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+6)^2}$ b) $f(x) = \sqrt{sen\,x}$

29 a) $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $f(x) = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$

30 a) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \dfrac{x}{3}$ b) $f(x) = ln\,3x + e^{\sqrt{x}}$

31 a) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2$ b) $f(x) = e^{2x} \cdot tg\,x$

32 a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ b) $f(x) = cos^2\,x + e^{sen\,x}$

33 a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-4}}$ b) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{1-x}$

34 a) $f(x) = sen\,\dfrac{3\pi}{2}$ b) $f(x) = log\,\dfrac{x^2}{3-x}$

35 a) $f(x) = tg^3\,x^2$ b) $f(x) = \sqrt{ln\,x}$

36 a) $f(x) = arc\,sen\,\dfrac{x^2}{3}$ b) $f(x) = arc\,tg\,(x^2+1)$

37 a) $f(x) = arc\,cos\,\dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = arc\,tg\,\dfrac{\sqrt{x}}{2}$

38 a) $f(x) = \sqrt{arc\,tg\,x}$ b) $f(x) = arc\,cos\,e^{-x}$

39 a) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ b) $f(x) = arc\,tg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

Puntos en los que la derivada vale *k*

40 Halla los puntos en los que la derivada es igual a 0 en las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$ b) $y = x^3 - 3x$

41 Obtén los puntos donde $f'(x) = 1$ en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+5}$

42 Halla los puntos en los que la derivada de cada una de las siguientes funciones es igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$ b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$ d) $y = ln\,(4x-1)$

43 Halla los puntos en los que la derivada vale 0 en cada uno de los siguientes casos:

a) $y = 2x^2 - 8x + 5$ b) $y = -x^2 + 5x$

c) $y = x^4 - 4x^2$ d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

Recta tangente

44 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.

45 Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.

46 Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = x^2 + 4x + 1$ cuya pendiente sea igual a 2.

47 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.

Puntos singulares

48 Obtén los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$ d) $y = x^3 - 12x$

49 Halla los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ b) $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

50 Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares:

a) $y = x^3 + 3x$ b) $y = \dfrac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$ d) $y = \ln x$

Crecimiento y decrecimiento

51 Observa los resultados obtenidos en los ejercicios 15 al 25 y di si cada una de las funciones dadas es creciente o decreciente en el punto que se indica.

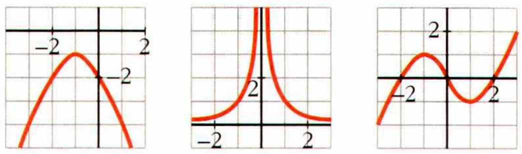
52 Obtén los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{3x + 1}{2}$ b) $y = 5 - 2x$

c) $y = x^2 - 3x + 2$ d) $y = 2x - x^2$

e) $y = x^3$ f) $y = x^3 - 3x$

53 Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa.



☛ *Observa su crecimiento y decrecimiento. La primera crece si $x < -1$.*

54 Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén su función derivada y estudia su signo.

¿Cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f? ¿Tiene f máximo o mínimo?

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

55 Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos:

- Es continua.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- Tiene tangente horizontal en $(-3, 2)$ y en $(1, 5)$.

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.

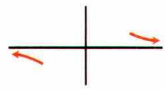
56 De una función polinómica sabemos que:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada es igual a 0 en $(-2, 2)$ y en $(2, -1)$.
- Corta a los ejes en $(0, 0)$ y en $(4, 0)$.

Represéntala gráficamente.

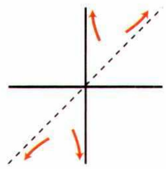
57 Representa la función continua $y = f(x)$ de la que sabemos:

- En los puntos $(-1, -2)$ y $(1, 2)$ la tangente es horizontal.
- Sus ramas infinitas son así:



58 Comprueba que la función $y = (x - 1)^3$ pasa por los puntos $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(2, 1)$. Su derivada se anula en el punto $(1, 0)$. ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?

59 Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, $(-1, -2)$ y $(1, 2)$; sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración de la derecha. Represéntala.



60 Comprueba que la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2 + 1}$:

- Tiene derivada nula en $(0, 0)$.
- La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.
- Posición de la curva respecto a la asíntota:

  Si $x \to -\infty$, $y < 2$

  Si $x \to +\infty$, $y < 2$

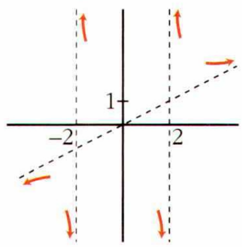
Represéntala.

61 Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:

$\left(-3, -\dfrac{5}{2}\right)$, $(0, 0)$

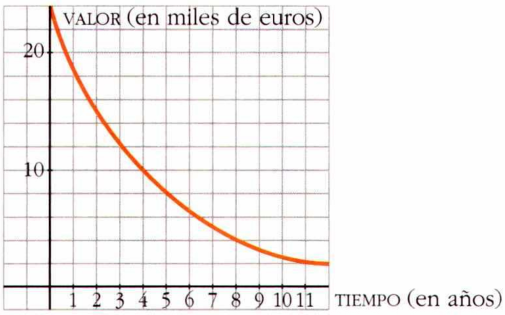
y $\left(3, \dfrac{5}{2}\right)$

y que sus ramas infinitas son las representadas.



PARA RESOLVER

62



Los coches, una vez que se compran, empiezan a perder valor: un 20% cada año, aproximadamente. Esta gráfica muestra el valor de un coche desde que se compró hasta 12 años más tarde. Calcula lo que se deprecia el coche en los dos primeros años, entre los años 4 y 6, y entre los años 8 y 10. ¿Es constante la depreciación?

63 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $6x - y + 10 = 0$.

☛ *La pendiente de la recta es el coeficiente de* x *cuando la* y *está despejada.*

64 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

65 a) ¿Cuál es la derivada de $y = 2x + 8$ en cualquier punto?

b) ¿Cuánto ha de valer x para que la derivada de $y = x^2 - 6x + 5$ sea igual a 2?

c) ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 6x + 5$ es paralela a la recta $y = 2x + 8$?

66 ¿En qué puntos la recta tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene la pendiente igual a 8?

67 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

68 Halla los puntos de tangente horizontal de la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$.

69 ¿En qué puntos de $y = 1/x$ la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante?

¿Existe algún punto de tangente horizontal en esa función?

70 La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?

☛ *Halla la pendiente de esa recta y ten en cuenta su relación con la derivada.*

71 Aplica las propiedades de los logaritmos para derivar las siguientes funciones:

a) $f(x) = ln\, \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ b) $f(x) = ln \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$

c) $f(x) = ln\, x\, e^{-x}$ d) $f(x) = log\, \dfrac{(3x-5)^3}{x}$

e) $f(x) = log\,(tg\, x)^2$ f) $f(x) = ln\, x^x$

72 En cada una de las siguientes funciones, halla los puntos singulares y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos. Represéntalas:

a) $y = x^3 - 3x^2$

b) $y = x^3 - 3x + 2$

c) $y = x^4 + 4x^3$

d) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$

e) $y = 12x - x^3$

f) $y = -x^4 + x^2$

g) $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$

h) $y = x^4 - 8x^2 + 2$

73 Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y estudiando sus ramas infinitas:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x$ b) $y = -x^4 + 2x^2$

c) $y = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 4}$ d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{x}{(x+5)^2}$ f) $y = \dfrac{2x^2}{x+2}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

74 Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ b) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

c) $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ d) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

75 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x}{x^2-16}$ b) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$

c) $y = \dfrac{x+2}{x^2-6x+5}$ d) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

e) $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ f) $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

g) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$ h) $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

i) $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ j) $y = \dfrac{x^2-5}{2x-4}$

76 Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2, –1) vale 0.

☛ *Llama a la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ y ten en cuenta que $f(0) = 1$, $f(2) = -1$ y $f'(2) = 0$.*

77 Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.

78 Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.

79 Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.

80 Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por (1, 1).

81 Halla el valor de k para que la tangente a la gráfica de la función $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ pase por el origen de ordenadas.

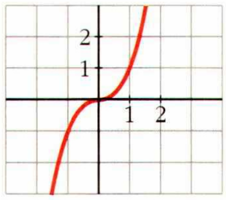
CUESTIONES TEÓRICAS

82 Calcula la T.V.M. de $f(x) = 3x - 2$ en los intervalos $[-1, 2]$, $[1, 3]$ y $[-3, 4]$. Justifica por qué obtienes el mismo resultado.

83 Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo $[-1, 1]$ y positiva para cualquier otro valor de x.

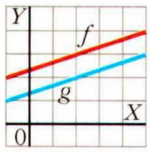
84 Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?

85 Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.



¿Por qué podemos asegurar que el eje de abscisas es la tangente de esa curva en (0, 0)?

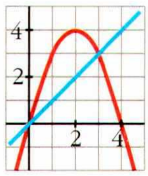
86



¿Qué relación existe entre f y g?

¿Y entre f' y g'?

87 ¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en que la tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos (0, 0) y (3, 3)? En caso afirmativo, hállalo.



88 Demuestra, utilizando la derivada, que la abscisa del vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es $x = \dfrac{-b}{2a}$.

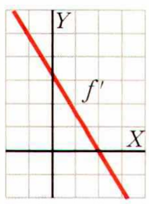
89 Si $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?

a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

b) La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto (2, 0).

90



Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.

a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

PARA PROFUNDIZAR

91 Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa 2 aplicando la definición.

92 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = ln\, x$ que es paralela a la recta $y = 3x - 2$.

93 ¿Cuáles son los puntos singulares de las funciones $y = sen\, x$ e $y = cos\, x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$?

94 ¿Tiene algún punto de tangente horizontal la función $y = tg\, x$?

95 Estudia y representa las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{4 - 2x^2}{x}$ b) $y = \dfrac{x^3}{3(x + 1)}$

c) $y = \dfrac{4 + 2x^2 - x^3}{x^2}$ d) $y = \dfrac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 1}$

96 El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es:

$$C(q) = 3q^2 + 5q + 75$$

El coste medio por unidad es: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

97 La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).

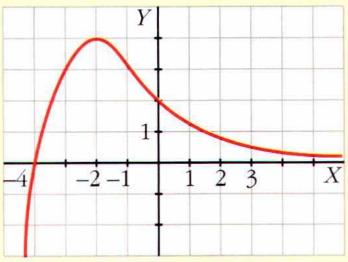
a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

AUTOEVALUACIÓN

1. Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos $[0, 3]$ y $[-4, -2]$?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

2. Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.

3. Halla la derivada de las siguientes funciones:

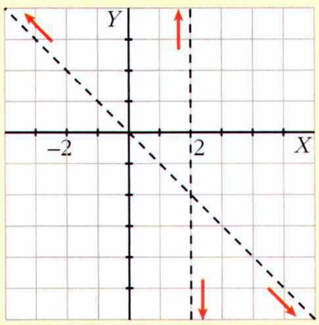
a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$ b) $y = \dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}$

c) $y = cos^2\, \pi x$ d) $y = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

4. Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\, x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

5. Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1 - x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?

6. Determina los puntos singulares de $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$ de la cual conocemos sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas. Represéntala.



7. Representa la función $y = x^3 - 12x + 16$.

8. Estudia y representa $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

9. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

3. En tu CD puedes encontrar las resoluciones de todos estos ejercicios.

Autoevaluación

BLOQUE IV: Análisis

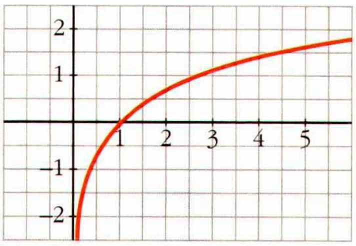
1. Halla el dominio de definición de las funciones siguientes:

a) $y = log\ (1 - x)$ b) $y = \dfrac{1}{cos\ x}$

2. Representa las funciones:

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$ b) $y = log_2\ (x + 3)$

3. Esta es la gráfica de la función $f(x) = ln\ x$.



A partir de ella, representa:

a) $y = f(x) + 2$ b) $y = f(x - 2)$ c) $y = -f(x)$

4. Si $y = f(x)$ pasa por el punto $(2, -3)$, di un punto de:

a) $y = f(x) + 4$ b) $y = f(x + 4)$

c) $y = 2f(x)$ d) $y = -f(x)$

5. Representa: $y = Ent(x)$, $x \in [-1, 3)$

6. Una población de insectos crece según la función: $y = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x}$ (x = tiempo en días; y = número de insectos en miles).

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en llegar a 10 000 insectos.

7. A partir de las funciones: $f(x) = e^x$; $g(x) = sen\ x$; $h(x) = \sqrt{x}$, hemos obtenido, por composición, las funciones:

$$p(x) = sen\ \sqrt{x};\quad q(x) = e^{sen\ x};\quad r(x) = \sqrt{e^x}$$

Explica el procedimiento seguido.

8. En la función: $f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.

b) Después de hallar b, explica si f es continua en $x = 2$.

9. Prueba, utilizando la definición, que la función derivada de $f(x) = \dfrac{3x - 5}{2}$ es $f'(x) = \dfrac{3}{2}$.

10. Halla la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$, que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

11. Halla los puntos singulares de $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.

12. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{tg\ x}$ b) $f(x) = \dfrac{ln\ x}{x}$

c) $f(x) = arc\ tg\ x^2$ d) $f(x) = e^{\pi}$

e) $f(x) = \dfrac{arc\ sen\ x}{2}$ f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

13. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:

a) $y = x^3 - 12x$ b) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

14. En la función $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ estudia:

a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Los máximos y los mínimos relativos.

c) Representa su gráfica.

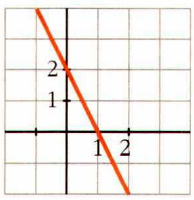
15. ¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?

a) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x - 1}$ b) $y = 1 + \dfrac{3}{x}$ c) $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x}$

Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

16. Calcula a y b de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en $(2, 1)$.

17. Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.



a) Di para qué valores de x es f creciente y para cuáles f es decreciente.

b) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal? Justifícalo.

En tu CD tienes las resoluciones de estos ejercicios.